

RESOLUCIÓ DE TRIANGLES AMB EL SUPORT DEL SECTOR ANGLÈS: ALGUNES REFLEXIONS SOBRE LA SEVA IMPLEMENTACIÓ A L'AULA DE MATEMÀTIQUES

MÒNICA BLANCO

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Resum: El sector anglès és un instrument matemàtic, utilitzat al segle XVIII per a resoldre triangles. L'anàlisi contextualitzada d'aquest instrument matemàtic es pot incorporar com a recurs explícit a l'aula per millorar la comprensió de conceptes trigonomètrics. Aquesta contribució se centra en el disseny d'una activitat d'aula per resoldre triangles des d'una perspectiva històrica, basada en la descripció i l'ús del sector anglès, inclosa en l'obra d'Edmund Stone (ca. 1695-1768), The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments (1723).

Paraules clau: instruments matemàtics, resolució de triangles, Edmund Stone.

Triangle resolution Using the English Sector: Some Considerations Regarding its implementation in the Mathematics Classroom

Summary: The English sector is a mathematical instrument that was used in the 18th century for solving triangles. The contextualized analysis of this mathematical instrument can be incorporated as an explicit resource in the classroom to enhance the understanding of trigonometric concepts. This contribution focuses on the design of a classroom activity for solving triangles from a historical perspective, based on the description and use of the English sector, included in the work of Edmund Stone (ca. 1695-1768), The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments (1723).

Keywords: mathematical instruments, solution of triangles, Edmund Stone.

Introducció¹

La resolució de triangles rectangles apareix en el currículum de matemàtiques de 4t d'ESO, dins del bloc «Mesurament»,² i la de triangles en general en el currículum de 1r de batxillerat, dins del sentit de la mesura del bloc «Geometria».³ En general, s'estudia com utilitzar les raons trigonomètriques i les seves relacions per determinar longituds i mesures angulars en problemes de resolució de triangles, que es poden modelitzar amb triangles. A més a més, s'hi inclou l'estudi de l'origen i ús de la trigonometria al llarg de la història. La utilització de la història de les matemàtiques com a recurs explícit a l'aula permet millorar l'assoliment de conceptes matemàtics (Guevara Casanova i Massa-Esteve, 2009; Van Gulik-Gulikers, Krüger i Van Maanen, 2020; Massa-Esteve, 2003). Es poden dissenyar i experimentar activitats d'aula que ajudin a entendre millor els conceptes matemàtics, i que contribueixin a millorar la formació integral dels alumnes, amb un coneixement addicional del context social i científic dels períodes involucrats. Els treballs del grup d'Història de les Matemàtiques d'ABEAM sobre el naixement i el desenvolupament històric de la trigonometria, a partir de l'anàlisi contextualitzada de textos històrics, il·lustren aquest enfocament en el cas de conceptes trigonomètrics.⁴

D'altra banda, Greenwald & Thomley (2013) afirmen que la connexió explícita entre eines, problemes, persones i història pot promoure l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. Actualment trobem enfocaments que promouen la utilització d'instruments antics a l'aula de matemàtiques moderna. Bartolini Bussi defensa la utilització d'instruments antics a l'aula moderna, tant com a experiència física, com a forma alternativa de desenvolupar la comprensió de conceptes matemàtics específics (Nagaoka *et al.*, 2000: 343-350). En el cas de la trigonometria, Ackerberg-Hastings (2007) presenta com l'estudi d'un instrument històric a l'aula de matemàtiques (el transportador rectangular) pot servir per introduir el procés abstracte per dibuixar angles.

El sector anglès és un instrument matemàtic, utilitzat especialment en el segle XVIII, una de les aplicacions del qual és la resolució de triangles. Es pot incorporar l'anàlisi contextualitzada d'aquest instrument matemàtic com a recurs explícit a l'aula per millorar l'assoliment de conceptes trigonomètrics. Aquesta contribució se centra en el disseny d'una activitat d'aula basada en la descripció i l'ús del sector anglès, per treballar la resolució de triangles a l'aula de matemàtiques des d'una perspectiva històrica, a partir de la descripció que se'n troba a l'obra d'Edmund Stone (ca. 1695-1768) sobre instruments matemàtics.⁵

1. Aquest treball s'inclou en el projecte PID2020-113702RB-I00.

2. <https://xtec.gencat.cat/web/.content/curriculum/eso/curriculum-175-2022/Matematiques.pdf>

3. <https://xtec.gencat.cat/web/.content/curriculum/batxillerat/curriculum-171-2022/materies-obligatories-de-modalitat/Matematiques.pdf>

4. Vegeu, per exemple, Guevara Casanova, Romero Vallhonesta i Massa-Esteve, 2008; Romero Vallhonesta *et al.*, 2009 i Blanco, 2015.

5. El meu interès per la vida i l'obra d'Edmund Stone va començar mentre estudiava els treballs de Thomas Simpson (1710-1761) sobre el mètode de fluxions, de 1737 i 1750. Per entendre les diferències entre ambdues obres, calia explorar la influència matemàtica d'altres autors sobre Simpson. Entre d'altres, vaig examinar el *Method of Fluxions both Direct and Inverse* (1730) de Stone. La part «directa» era una traducció de l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital (1696), mentre que la part «inversa» es basava en l'*Harmonia Mensurarum* de Cotes (1722). El *Method of Fluxions* de Stone va ser un dels primers llibres sobre fluxions que Simpson va llegir. A més del *Method of Fluxions*, Stone va publicar una gran quantitat de treballs matemàtics, quantitat que sobta més encara en tractar-se del fill autodidacta del jardiner de John Campbell (1680-1743), duc d'Argyll i de Greenwich. Vegeu Blanco (2015).

El sector anglès

El 1723 Edmund Stone va publicar *The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments*, un dels primers manuals generals en anglès sobre instruments matemàtics. Es tracta essencialment d'una traducció del *Traité de la construction et des principaux usages des instrumens de mathématique* (1709) de Nicolas Bion (1652-1733). En el pròleg del traductor, Stone defineix les matemàtiques com a ciència, pel que fa a la teoria, i com a art, pel que fa a la pràctica. Els instruments matemàtics connecten aquests dos aspectes de les matemàtiques. Atès que el coneixement dels instruments matemàtics porta al coneixement de les matemàtiques pràctiques, el seu estudi pot considerar-se, segons Stone, com una de les branques de coneixement més útils i, per tant, cal fomentar-ne l'ús.

Al final de la seva traducció, Stone annexa diversos instruments, no presents al llibre de Bion, en particular aquells instruments inventats o millorats pels anglesos. Així, per exemple, després de la traducció del llibre II sobre la construcció i usos del compàs de proporció, o «sector francès», Stone afegeix un annex sobre la construcció i usos del «sector anglès». El compàs de proporció, o sector en la seva versió anglesa, és un instrument matemàtic format per dos braços de la mateixa longitud, articulats i units en un extrem. Ambdós costats dels braços presenten gravades diverses escales amb diferents mesures que resulten útils per resoldre problemes relacionats amb la proporció.⁶ La diferència principal entre les dues versions de l'instrument és la diversitat i quantitat de línies traçades a ambdós costats de l'instrument (vegeu fig. la 1).⁷ Així, segons el llibre de Bion, les línies del «sector francès» són: línies de parts iguals, de plans, de polígons, de cordes, de sòlids, de metalls. En canvi, les línies principals sobre el «sector anglès» segons Stone són les línies de parts iguals, de cordes, de sinus, de tangents, de secants, de polígons, sinus artificials, tangents artificials i l'escala de Gunter.

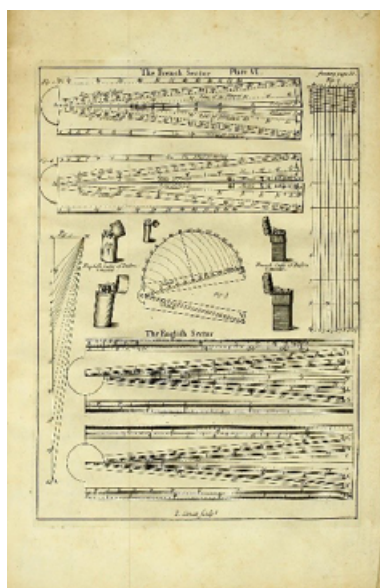


FIGURA 1. El sector francès i anglès, segons la làmina VI de Stone (1723).

FONT: Stone, 1723: làmina VI.

6. Sobre la història d'aquest instrument, es pot consultar Frémontier-Murphy (2013) i Navarro Loidi (2007).

7. Totes les figures del llibre de Stone (1723) corresponen a la versió digitalitzada per Internet Archive, 2012, disponible a <http://archive.org/details/constructionprin00bion>

Les línies traçades a ambdós costats del sector (per exemple, a , b) s'anomenen *laterals* (vegeu la fig. 2). Les línies que van d'un braç del sector a l'altre, en divisions iguals des del centre (per exemple, x , y), s'anomenen *paral·leles*. El funcionament del sector es basa en la proposició 4 del llibre VI dels *Elements* d'Euclides, centrada en la semblança de triangles: el segment a és al segment x , com el segment b és al segment y . Amb el suport d'un parell de compassos, es pot fixar la distància entre dos termes sobre una mateixa línia lateral, així com determinar la longitud de línies paral·leles.

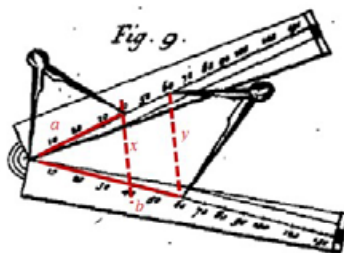


FIGURA 2. Ús general del sector de Stone (1723).

FONT: Stone, 1723: Fig. 9, Làmina VII. Les línies vermelles són de l'autora.

El sector és considerat com un instrument útil per a la matemàtica pràctica, especialment adient per a la navegació, la topografia o la projecció de l'esfera. Per a la resolució d'aquestes qüestions pràctiques resulta fonamental la trigonometria i, en particular, la doctrina dels triangles, inclosa a la tercera secció de l'annex de Stone sobre el sector anglès.⁸ A partir de la descripció del sector anglès i de la seva aplicació a la resolució de triangles, s'ha dissenyat una activitat per implementar a l'aula de matemàtiques. L'activitat dissenyada consta de dues parts: la primera es basa en la construcció d'un sector anglès en paper, i en la segona part es treballen alguns exemples d'aplicació. Aquesta activitat s'ha implementat de forma preliminar amb estudiants de matemàtiques per a l'ensenyament secundari, assignatura optativa del Grau Matemàtiques de l'FME (UPC), i amb un grup d'estudiants de l'especialitat de Matemàtiques del Màster Interuniversitari en Formació de Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes, durant el curs 2023-2024.

Primera part: construcció d'un sector anglès

La replicació d'un sector anglès és una altra manera de mostrar la resolució de triangles a futurs ensenyants de matemàtiques, fins i tot a nivell de secundària. Als estudiants de matemàtiques del segle XXI els pot sobtar que astrònoms, topògrafs o navegants del segle XVIII haguessin de fer els seus càlculs a mà, amb el suport d'instruments matemàtics, sense ordinadors ni calculadores. També és una manera de remarcar el fet que algú havia de dividir les escales de manera precisa per construir els sectors i, per tant, rescatar figures secundàries i destacar el seu paper en el procés de circulació de les idees matemàtiques.

En una primera sessió, es proposa formar grups de 2-3 estudiants per construir una rèplica de sector en paper, en particular, la línia de sinus. Com a material es necessita: paper mil·limetrat,

8. Per a més detalls sobre l'aplicació del sector anglès per a resoldre triangles, vegeu Blanco (2023).

tisores, regle, enquadernadors i calculadora. Primer, cal retallar el paper mil·limetrat per construir els dos braços del sector, i unir-los amb un enquadernador en un punt adient. A continuació, cal marcar la línia de sinus, per a la qual cosa cal tenir en compte la llargada dels braços del sector (vegeu la fig. 3). Com a referència, es pren la definició de línia de sinus del llibre de Stone:

The **line of sines** is a line of natural sines, divided from a circle of the same radius,* as the line of chords on the sector was, these are also placed upon each leg of the sector and numbered with the figures 10, 20, 30 &c to 90, at the end of which, on each leg, is set the letter S.

* It is nearly equal in length to the legs of the sector, beginning at the centre and running towards the end thereof (Stone, 1723: 66).

Aquí cal treballar amb el suport de la calculadora per trobar els valors de $\sin(10^\circ)$, $\sin(20^\circ)$, $\sin(30^\circ)$, etc. Aquests valors es multipliquen per la llargada del sector i es fa la marca corresponent sobre ambdós braços del sector. El paper mil·limetrat juga el paper de recta, o de línia de parts iguals.

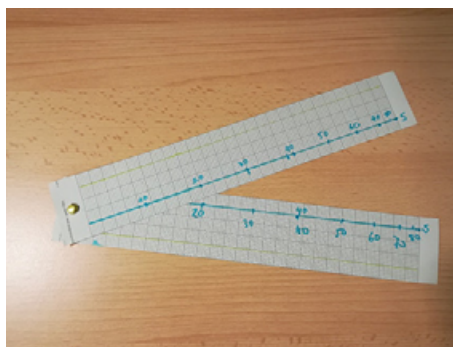


FIGURA 3. Sector fet en paper durant l'activitat a l'aula.

FONT: Elaboració pròpia.

Stone dona indicacions sobre com utilitzar el sector per calcular la corda, el sinus o la tangent de 10 graus corresponents a un radi de 3 polzades:

Suppose the chord, sine, or tangent of 10 degrees, to a radius of three inches, is required. Take those three inches, and make it a parallel between 60 and 60 on the line of chords, then, as I have already said, the same extent will reach from 45 to 45, on the line of tangents, also on the other side of the sector, the same distance of three inches will reach from 90 to 90 on the line of sines so that if the lines of chords be set to any radius, the lines of sines and tangents are also set to the same. Now the sector being thus opened, if you take the parallel distance between 10 and 10 on the line of chords, it will give the chord of 10 degrees. Also, if you take the parallel distance on the line of sines between 10 and 10, you will have the sine of 10 degrees. Lastly, if you take the parallel extent on the line of tangents, between 10 and 10, it will give you the tangent of 10 degrees (Stone, 1723: 67-68).

Seguint les instruccions donades per trobar el $\sin(10^\circ)$, el procediment es pot interpretar de la manera següent, mitjançant triangles semblants:

$$\frac{3}{\sin(90^\circ)} = \frac{L}{\sin(10^\circ)}$$

$$L = \frac{3 \sin(10^\circ)}{\sin(90^\circ)} = 3 \sin(10^\circ)$$

D'aquí es dedueix que:

$$\sin(10^\circ) = \frac{L}{3}$$

Per tant, aquest pas permet reflexionar sobre la definició de sinus, i la seva relació amb la semicorda i el radi.

Es proposa a continuació calcular el sinus de 30° corresponent a un radi de 3 cm (vegeu la fig. 4). Amb el suport del compàs, es pren la longitud 3 cm. Un extrem del compàs es fixa sobre la marca $\sin(90^\circ)$ sobre un dels braços del sector, el qual s'obre de manera que l'altre extrem del compàs coincideixi amb la marca $\sin(90^\circ)$ de l'altre braç. Aleshores s'utilitza el compàs per mesurar la distància entre les marques de $\sin(30^\circ)$ dels dos braços. Aquesta distància correspon a L .

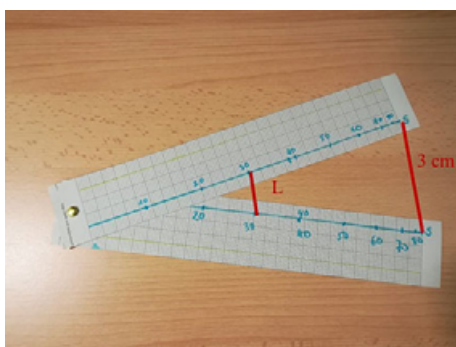


FIGURA 4. Com calcular el sinus de 30° corresponent a un radi de 3 cm a partir del sector fet en paper.

FONT: Elaboració pròpia.

Els diferents grups apunten a la pissarra el resultat obtingut, així com la llargada del seu sector (vegeu la fig. 5), i el comparen amb el valor real. La discussió sobre els resultats obtinguts facilita la reflexió, des d'una perspectiva històrica, sobre la interacció entre la pràctica i la teoria, entre artesans i científics, per millorar la precisió dels instruments de mesura. Aquest exercici també pot servir per introduir consideracions estadístiques, en línia amb Van Gulik-Gulikers, Krüger & Van Maanen (2020).

Amb la construcció i manipulació de l'instrument, l'estudiant s'implica activament en activitats pràctiques. Aquesta primera part de l'activitat fomenta la cooperació entre estudiants i la presa de decisions, per obtenir bons resultats. A continuació, es treballa la resolució de triangles amb el suport del sector construït.



FIGURA 5. Recollida de resultats a la pissarra durant l'activitat desenvolupada a l'aula.

FONT: Elaboració pròpia.

Segona part: Ús del sector en trigonometria

En una segona sessió es poden estudiar algunes de les aplicacions del sector en la trigonometria. En la Secció III, Stone il·lustra l'ús del sector en trigonometria, en particular, en la resolució de diversos casos de triangles plans, tant rectangles (usos I-VI) com obliquangles (usos VII-IX), i també triangles esfèrics (usos X-XI). La doctrina de triangles s'aplica per a resoldre qüestions pràctiques com ara la determinació d'altures o de distàncies. Stone comença treballant amb exemples de triangles rectangles (Figura 6.a):

USE II. *The perpendicular AB of the right-angled triangle ABC being given 30 miles, and the angle BCA 37 degrees, to find the hypotenuse BC. Take the given side AB, and set it over, as a parallel, on the Sine of the given angle ACB, then the parallel radius will be the length of the hypotenuse BC, which will be found 50 miles, by applying it on the line of lines (Stone, 1723: 68).*

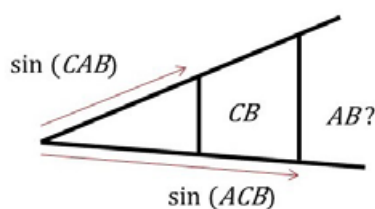
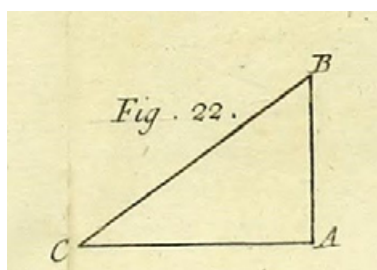


FIGURA 6. Per il·lustrar l'ús II: a) Fig. 22, làmina VII. b) Esquema.

FONT 6a: Stone, 1723: Fig. 22, Làmina VII. 6b: Elaboració pròpia.

La figura 6.b representa de manera esquemàtica la utilització del sector en aquest cas. Stone no dona cap més explicació, però la seva resolució es pot interpretar de la manera següent:

$$\frac{\sin(37^\circ)}{30} = \frac{\sin(90^\circ)}{BC}$$

Per tant, la hipotenusa buscada és:

$$BC = \frac{30}{\sin(37^\circ)}$$

Expressió de la qual es pot deduir la formulació del sinus:

$$\sin(37^\circ) = \frac{30}{BC}$$

Aquest primer exemple ofereix l'oportunitat de revisar o introduir la definició del sinus com a raó trigonomètrica, en línia amb el currículum de 4t d'ESO. Si bé és cert que la utilització de dos triangles, l'original i el corresponent al sector, pot portar a confusió, es pot aprofitar aquest exercici per treballar l'abstracció matemàtica.

Stone continua amb la resolució de triangles obliquangles, donats dos angles i un costat, amb el suport del sector anglès. Donats els angles CAB i ACB , i el costat CB , es tracta de trobar la base del triangle, AB (vegeu la fig. 7).

USE VII. *The Angles CAB, and ACB, being given, and the Side CB: to find the Base AB.*

Take the given Side CB, and turn it into the parallel Sine of its opposite Angle CAB, and the parallel Sine of the Angle ACB, will be the Length of the Base AB. (Stone 1723: 69)

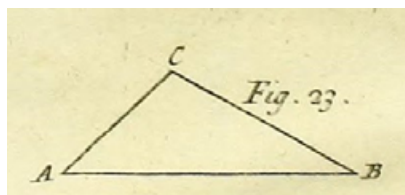


FIGURA 7. Per il·lustrar l'ús del sector.

FONT: Stone, 1723: Fig. 23, Làmina VII.

Es pren el costat CB com a sinus paral·lel de l'angle oposat, CAB . Finalment, el sinus paral·lel de l'angle ACB és la longitud AB . En notació moderna, el procediment descrit es podria escriure com:

$$\frac{CB}{\sin(CAB)} = \frac{AB}{\sin(ACB)}$$

O bé:

$$\frac{\sin(CAB)}{CB} = \frac{\sin(ACB)}{AB}$$

Malgrat no proporcionar més explicacions, resulta evident que aquí Stone utilitza el resultat avui conegut com a *lleï dels sinus*, que relaciona els costats d'un triangle qualsevol en el pla, amb els sinus dels angles oposats.⁹ Aquest exemple pot resultar més adient per al currículum de batxillerat. En aquesta segona part de l'activitat es fa una aproximació a l'estudi de la llei dels sinus des d'una

9. Es pot trobar informació detallada sobre la història de la llei del sinus a Van Brummelen (2009): 109-111, 188-189, 235-236, 246-247, 256, 267.

perspectiva històrica, per reflexionar sobre la motivació original i el context en què sorgeix el problema. Quan no és possible trobar directament una mesura, com la distància a un punt no accessible, actualment es fan servir eines electròniques, basades en l'òptica o en GPS. Abans de l'aparició del GPS, però, les eines matemàtiques utilitzades per mesurar distàncies era la combinació de triangulació, trigonometria i teoria de triangles semblants (Van Gulik-Gulikers, Krüger & Van Maanen, 2020: 236).

Reflexions finals

L'activitat presentada pretén estimular l'interès per la trigonometria, en particular, per la resolució de triangles. Té interès des del punt de vista didàctic perquè combina una experiència física (activitat manipulada amb un instrument, el sector anglès), amb la lectura d'un text matemàtic històric (fragments de l'obra de Stone relacionats amb el sector anglès). L'activitat pot ajudar a entendre millor els conceptes matemàtics, contribuint a millorar la formació integral de l'estudiant, amb un coneixement addicional del context social i científic dels períodes involucrats.

Agraïments

Voldria agrair les aportacions i els comentaris dels estudiants que han participat en l'activitat presentada, tant del Grau de Matemàtiques (FME-UPC), com de l'especialitat de Matemàtiques del Màster Universitari en Formació de Professorat d'Educació Secundària Obligatoria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes.

Referències bibliogràfiques

- ACKERBERG-HASTINGS, Amy (2007). «Rectangular Protractors and the Mathematics Classroom». A: SHELL-GELLASCH, Amy (ed.). *Hands On History. A Resource for Teaching Mathematics*. The Mathematical Association of America Notes, Series Number 72, p. 35-40.
- BLANCO, Mònica (2015). «On gardeners, dukes and mathematical instruments». *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 125, p. 22-28.
- (2023). «El uso del sector inglés en la resolución de triángulos: interacción entre la teoría y la práctica matemática en el siglo XVIII». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 21, p. 117-132.
- FRÉMONTIER-MURPHY, Camille (2013). «A new mathematical vision for an innovative calculating instrument: Galileo's sector». *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 118, p. 35-43.
- GREENWALD, Sarah; THOMLEY, Jill (2013). «Using the history of mathematics technology to enrich the classroom learning experience». *Electronic Proceedings of the Twenty-fourth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, paper S071. <<http://archives.math.utk.edu/ICTCM/i/24/S071.html>>.
- GUEVARA CASANOVA, Iolanda; ROMERO VALLHONESTA, Fàtima; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2008). «Geometria i trigonometria en el teorema de Menelau (100 dc)». A: GRAPÍ, Pere; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (coords.). *Actes de la III Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: IEC, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 39-50.
- GUEVARA CASANOVA, Iolanda; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2009). «La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 2 (1), p. 377-388.
- NAGAOKA, Ryosuke [et al.] (2000). «Non-standard media and other resources». A: FAUVEL Jacques; VAN MAANEN, Jan (eds.). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer, p. 329-370.
- NAVARRO LOIDI, Juan (2007). «El compás de proporción, compás geométrico y militar o Pantómetra». A: GRAPÍ, Pere; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (coords.). *Actes de la II Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: IEC, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 89-96.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2003). «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica». *Biaix*, 21, p. 4-9.
- ROMERO VALLHONESTA, Fàtima [et al.] (2009). «La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per treballar a l'aula». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 2 (1), p. 427-436.
- STONE, Edmund (1723). *The construction and principal uses of mathematical instruments. Translated from the French of M. Bion, Chief Instrument-Maker to the French King. To which are added, the construction and uses of such instruments as are omitted by M. Bion*. Versió digitalitzada per Internet Archive, 2012, disponible a: <<http://archive.org/details/constructionprin00bion>>
- VAN BRUMMELEN, Glen (2009). *The mathematics of the heavens and the earth: The early history of trigonometry*. Princeton: Princeton University Press.
- VAN GULIK-GULIKERS, Iris; KRÜGER, John; VAN MAANEN, Jan (2020). «Eighteenth Century Land Surveying as a Context for Learning Similar Triangles and Measurement». A: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (ed.). *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics. Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education*, ICME-13 Monographs, Springer, p. 235-261.